Domaine Sciences et Technologies
PORTAIL 1 RENÉ DESCARTES

Introduction à l'informatique : TD 11
Code UE : S14IN1I1

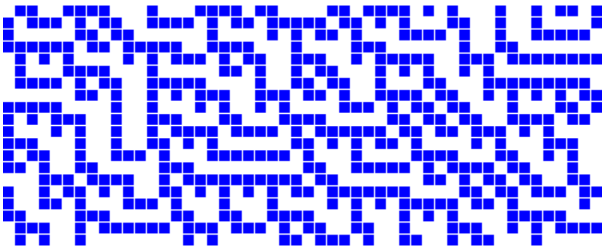
Année 2018-19

Automates cellulaires et systèmes dynamiques

Exercice 1 Nous allons nous intéresser dans cet exercice aux automates cellulaires élémentaires. Comme vu en cours, un automate cellulaire élémentaire est un automate cellulaire en une dimension (*i.e.*, des cellules à voisinage local disposées sur chaque élément de $\mathbb{Z}$ qui admettent toutes la même fonction locale de transition), dont le voisinage est défini par $V = \{-1, 0, 1\}$ et tel que chaque cellule admet deux états $Q = \{0, 1\}$. Par ailleurs, nous nous focaliserons uniquement sur des automates cellulaires sur des grilles finies périodiques.

Question 1.1 Combien existe-t-il d'automates cellulaires élémentaires ?

Question 1.2 Quel est le numéro (de Wolfram) de l'automate cellulaire admettant le diagramme espace temps suivant (le temps est dirigé vers le haut : $t\uparrow$) ?



Question 1.3 Soit la configuration finie périodique suivante (sur le tore de dimension 1) :

En considérant cette configuration comme étant une configuration initiale, tracez le diagramme espace-temps des 5 premières étapes de temps de l'automate cellulaire élémentaire 231. Qu'observez-vous ?

Question 1.4 Donnez (sans réfléchir beaucoup normalement) 2 automates qui appartiennent de manière certaine à la classe des automates uniformes.

Question 1.5 Montrez que l'automate 128 est uniforme. Donnez la configuration qui converge le plus lentement.

Exercice 2 Dans cet exercice, nous allons nous intéresser à une généralisation des automates cellulaires qu'on appelle les réseaux d'automates (ou systèmes dynamiques finis). L'idée est "simple" : là où les automates cellulaires sont des objets réguliers (on travaille sur des grilles de dimension d ; chaque cellule a la même fonction de transition et le voisinage est invariant par translation), les réseaux d'automates ne le sont pas. Les cellules sont appelées des "automates", ces derniers ont des voisinages propres et chacun d'eux admet sa propre fonction de transition.

Pour simplifier les choses, nous allons nous attacher uniquement à une famille de réseaux d'automates que nous appelons couramment "réseaux booléens". Informellement, il s'agit d'objets mathématiques qui sont constitués d'automates admettant 2 états possibles, 0 ou 1, et qui interagissent localement les uns avec les autres au cours du temps (discret). Formellement, un réseau booléen f de taille n est une collection de fonctions telle que $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ et

$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, où $\forall i \in V = \{1, \ldots, n\}$, f_i est la *fonction locale de transition* de l'automate i et est telle $f_i : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Sur cette base, on appelle $x \in \{0,1\}^n$ une *configuration* du réseau, c'est-à-dire l'affectation d'un état booléen à chacun des automates le constituant. De plus, $x_i \in \{0,1\}$ représente l'état de l'automate i. Étant donné une configuration x, $f_i(x)$ donne le nouvel état de l'automate $i \in V$ à partir de la configuration x.

Voici un exemple de réseau booléen simple de taille 3 :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x_1 \wedge x_2 \\ f_2(x) = \neg x_3 \\ f_3(x) = x_1 \vee x_3 \end{cases} .$$

À partir d'un tel réseau, il est facile de représenter les influences que les automates ont les uns sur les autres par un graphe orienté $G = (V, E)$, que l'on appelle *graphe d'interaction*, tel que, pour $i, j \in V$, $(u, v) \in E$ si l'état de u a une influence sur le calcul de l'état de v, à savoir f_v.

Question 2.1 Donnez le graphe d'interaction de f, ainsi que son nombre de configurations.

On distingue deux types d'interactions : les positives et les négatives. Une interaction $(u, v) \in E$ est positive si l'état de v tend à mimer l'état de u ; inversement, (u, v) est négative si l'état de v tend à prendre la négation de l'état de u. Souvent, on représente le signe des interactions / influences directement sur le graphe d'interaction en étiquetant les arcs par $+$ ou $-$. On parle alors de graphe d'interaction signé.

Question 2.2 Indiquez la nature (positive ou négative) des influences sur le graphe d'interaction G_f et obtenez ainsi le graphe d'interaction signé de f.

Question 2.3 La définition d'un réseau booléen par f et son graphe d'interaction signé contiennent-il la même information ? En d'autres termes, un réseau booléen se caractérise-t-il par son graphe d'interaction signé ?

Question 2.4 On considère maintenant l'évolution parallèle de ce réseau, c'est-à-dire telle que, à chaque étape de temps, chaque automate $i \in V$ met à jour son état $x_i \in \{0,1\}$ en exécutant sa fonction locale de transition f_i. Calculez cette évolution de f et donnez le *graphe de transition* parallèle de f, noté $\mathcal{G}(f)$ tel que $G = (\{0,1\}^n, T)$, où $T \subseteq \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$ est l'ensemble des transitions parallèles et est tel que $(x, y) \in T \iff f(x) = y$. Qu'observez-vous ?

L'objectif est maintenant de nous intéresser à la dynamique des cycles booléens, c'est-à-dire des réseaux booléens dont le graphe d'interaction est un circuit au sens de la théorie des graphes. On distingue deux types de cycles booléens : les cycles positifs (resp. négatifs) qui sont tels qu'ils sont composés d'un nombre pair (resp. impair) d'influence.s négative.s. Des études passées ont montré que de tels motifs constituent les "moteurs de la complexité comportementale" (et donc de la richesse calculatoire) des réseaux qui les contiennent. Il est donc utile de voir comment ils se comportent.

Question 2.5 Considérez les réseaux booléens $g1$ et $g2$ définis par :

$$g1(x) = \begin{cases} g1_1(x) = x_2 \\ g1_2(x) = x_1 \end{cases} \qquad g2(x) = \begin{cases} g2_1(x) = x_3 \\ g2_2(x) = x_1 \\ g2_3(x) = x_2 \end{cases}$$

Donnez leurs graphes d'interaction signés et leurs graphes de transition. Qu'observez-vous ?

Question 2.6 Considérez les réseaux booléens $h1$ et $h2$ définis par :

$$h1(x) = \begin{cases} h1_1(x) = \neg x_2 \\ h1_2(x) = x_1 \end{cases} \qquad h2(x) = \begin{cases} h2_1(x) = \neg x_3 \\ h2_2(x) = x_1 \\ h2_3(x) = x_2 \end{cases}$$

Donnez leurs graphes d'interaction signés et leurs graphes de transition. Qu'observez-vous ?

Question 2.7 Que pensez-vous de la dynamique d'un réseau booléen sans-cycle ?