
TD 03 – Réductions

Exercice 1.

L'arrêt

Indiquer si chacun des énoncés qui suit est vrai ou faux, en justifiant.

1. $\exists M_{halt} : \forall \langle M \rangle, w : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.
2. $\forall \langle M \rangle, w : \exists M_{halt} : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.

Exercice 2.

Réductions Turing many-one

Ecrire chacune des réductions (Turing **many-one**) suivantes, et indiquer ce que l'on peut en déduire quant à la récursivité de ces langages.

1. Réduire $L_{halt} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur l'entrée vide}\}$ à $A = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur l'entrée } aa\}$.
2. Réduire $L_u = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ accepte le mot } w\}$ à $B = \{\langle M \rangle \mid a \in L(M)\}$.
3. Réduire $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ n'accepte pas } w\}$ à $C = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ n'accepte pas } w \text{ mais accepte } bbw\}$.
4. Réduire L à $aL = \{aw \mid w \in L\}$ pour tout langage L .
5. Réduire aL à L pour tout langage L .
6. Réduire $L_{stupid} = \{a\}$ à L_u .

Exercice 3.

Avec des réductions Turing many-one...

Montrer que les langages suivants ne sont pas décidables.

1. $D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur les entrées } ab \text{ et } ba\}$.
2. $E \times F$ avec $E = \{\langle M \rangle \mid b \in L(M)\}$ et $F = \{\langle M \rangle \mid a \in L(M) \text{ ou } b \in L(M)\}$.

Montrer que les langages suivants ne sont pas récursivement énumérables.

3. $G = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$.
4. $H = \{\langle M_1 \rangle \# \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$.

Montrer que les langages suivants sont récursivement énumérables.

5. $L_M = \{w \mid w \in L(M)\}$ avec M une machine de Turing.
6. $D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur les entrées } ab \text{ et } ba\}$.

Montrer que les langages suivants sont décidables.

7. $I = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle < 2^{2^{1024}} \text{ et } L(M) = \{a\}\}$
8. $L'_M = \{w \mid w \in L(M)\}$ avec une M une machine de Turing qui s'arrête toujours.

📎 Du plus « simple » au plus « difficile » à décider, ordonner les langages de cet exercice.

9. Proposer un nouveau langage, qui ne soit pas récursif.
10. Proposer un nouveau langage, qui ne soit pas récursif mais qui soit r.e.