TD 04 – Théorème de Rice

Exercice 1. *Propriétés de non-clôture*

Montrer avec des contre-exemples que les propriétés suivantes sont **fausses**.

1. La famille des langages non récursifs est close par intersection et union.
2. La famille des langages non récursivement énumérables est close par complémentation, intersection et union.

   Montrer que la propriété de clôture suivante est en revanche **vraie**.
3. La famille des langages non récursifs est close par complémentation.

Exercice 2. *Théorème de Rice*

Utiliser le théorème de Rice pour étudier la récursivité des propriétés suviantes.

1. $\{L \mid L = a^*\}$.
2. $\{L \mid aa \in L$, et $\forall k \neq 2 : a^k \notin L\}$.
3. $\{L \mid ab \notin L$, ou $\exists k : ab^k \in L\}$.
4. $\{\{\langle M\rangle \mid M$ n'accepte pas $\langle M\rangle\}\}$.
5. $\{\{\langle M\rangle \mid M$ accepte $\langle M\rangle\}\}$.
6. Plus généralement, que diriez-vous, pour un langage $L \subseteq \Sigma^*$ que l'on souhaite reconnaître, de la propriété $\{L\}$?

Exercice 3. *Réductions Turing many-one pour les fonctions*

Pour obtenir une réduction Turing many-one d'une fonction $f : A \to B$ à une fonction $g : C \to D$, il faut donner deux fonctions calculables $h : A \to C$ et $h' : D \to B$ telles que pour tout $a \in A$ on ait $f(a) = h'(g(h(a)))$. Ainsi on en déduit que si l'on sait calculer g alors on sait calculer f.

1. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_1 : (\langle M\rangle, w) \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } M(bw)\uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.
2. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_2 : \langle M\rangle \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } M(\epsilon)\uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.
3. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_3 : \langle M\rangle \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } M(\epsilon)\uparrow \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
4. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_4 : \langle M\rangle \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } M(ab)\uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice 4. *Arrêt et conjecture de Collatz*

La suite de Collatz (ou suite de Syracuse) d'un nombre n est la suite infinie $(f^i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ avec

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & n \mapsto \begin{cases} n/2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3n+1 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

La conjecture de Collatz, formulée en 1937 et toujours ouverte, est la suivante :

La suite de Collatz de tout entier $n \in \mathbb{N}$ atteint la boucle $1, 4, 2$.

1. Montrer que si l'on savait décider l'arrêt des machines de Turing, alors on saurait décider si la conjecture de Collatz est vraie ou fausse.