Domaine Sciences et Technologies
PORTAIL 1 RENÉ DESCARTES

Introduction à l'informatique : TD 1

Code UE : S14IN1I1

Année 2020–21

Codage des nombres

Un bit est l'unité d'information la plus simple, pouvant prendre deux valeurs communément notée 0 et 1. On représente l'entier naturel 0 avec le bit 0. On représente un entier naturel non nul $a \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ par une *suite de bits* $a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1 a_0$, avec $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} \in \{0, 1\}$, telle que $a_{n-1} = 1$ et

$$a = a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \cdots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$$

Cette suite est unique, grâce à la condition sur a_{n-1} : on l'appelle la *représentation binaire* de l'entier a. Par exemple, la représentation binaire de 35 est 100011 car $35 = 2^5 + 2^1 + 2^0$ et celle de 16 est 10000 car $16 = 2^4$.

Exercice 1

1. Donner la représentation binaire des entiers 13, 85, 128 et 127.
2. Quels sont les entiers dont les représentations binaires sont 10001, 110101 et 11111111 ?

Exercice 2 Un ordinateur sait calculer des opérations arithmétiques sur les représentations binaires d'entiers.

1. Saurez-vous additionner les représentations binaires 101001 et 1111010 ? Vérifier votre calcul en convertissant les représentations en entiers.
2. Poser de même la multiplication des représentations binaires 10110 et 1011.
3. Effectuer à l'aide des représentations binaires le calcul de 15×15.

Exercice 3 Soit n un entier dont la représentation binaire est de la forme $100 \cdots 001$ (des bits 0 encadrés par deux bits 1). Quelles sont les représentations binaires des entiers n^2 et n^3 ?

Il n'y a pas que des entiers à savoir coder. On peut aussi vouloir coder des nombres à virgule en binaire. De même que le nombre 3,14 vaut $3 + \frac{1}{10^1} + \frac{4}{10^2}$, en binaire on peut écrire des nombres à virgule 1,011 valant $1 + \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$. On est cependant encore limité. Par exemple, les physiciens ont souvent besoin de pouvoir encoder des grands entiers ou des nombres rationnels sous la forme de leur notation scientifique, tel que le nombre d'Avogadro par exemple qui décrit le nombre d'entités élémentaires (atomes, molécules ou ions) dans une *mole* de matières :

$$N_A = 6,022\ 140\ 857 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$$

ou la constante universelle de gravitation apparaissant dans la loi universelle de la gravitation de Newton :

$$G = 6,674\ 08 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$$

Pour stocker de tels nombres, on utilise la notation scientifique en binaire, appelée *représentation flottante*, pour approcher des nombres réel. On considère donc des réels pouvant s'écrire sous la forme

$$s\ m \times 2^k$$

avec s le signe (+ ou -) du réel, m un nombre à virgule compris entre 1 inclus et 2 exclus, et k son exposant. En *simple précision* par exemple (c'est-à-dire quand on se réserve 32 bits pour stocker le nombre flottant), 1 bit est utilisé pour représenté le signe s (0 pour le signe +, 1 pour le signe -), 8 bits pour l'exposant et 23 bits pour le nombre m qu'on appelle *mantisse* : puisqu'on représente m en binaire et qu'on le choisit dans l'intervalle $[1; 2[$, le nombre avant la virgule vaut toujours 1 et on ne le stocke donc pas en machine, utilisant ainsi les 23 bits pour les chiffres après la virgule.

L'exposant est un entier relatif entre -126 et 127 qu'on représente par l'entier naturel $e + 127$ qui est donc compris entre 1 et 254 (avec 8 bits, on peut aussi représenter les deux exposants 0 et 255, qui sont cependant réservés pour des situations exceptionnelles telles que $+\infty$, $-\infty$, etc.). Par exemple, la séquence de bits

$$10101001111001000110000000000000$$

est la représentation flottante du réel $-\frac{1827}{1024} \times 2^{-44} \approx -1,01 \times 10^{-13}$ puisque :

— le signe est encodé par le premier 1, et est donc - ;

— l'exposant est encodé par les huit bits suivants, 01010011, représentation binaire de l'entier 83, impliquant que l'exposant vaut $83 - 127 = -44$;

— la représentation en binaire de la mantisse est $1,11001000110000000000000$ qui vaut :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^5 + 2 + 1}{2^{10}} = \frac{1827}{1024}$$

Exercice 4 Trouver le réel représenté par la séquence 01001110001100110100000000000000.

Exercice 5 Comment représente-t-on en binaire le réel 2^{-126} (qui est proche de $2,35 \times 10^{-38}$) sur 32 bits ? Et l'entier 7 ? Et le réel $7,0$ sur 32 bits ?

Exercice 6

1. Quel est le plus grand entier qu'on peut représenter en binaire sur 32 bits ?
2. Quel est le plus grand réel qu'on peut représenter sur 32 bits ? Et le plus petit (négatif) ?
3. Quel est le plus petit réel strictement positif qu'on peut représenter sur 32 bits ?

Exercice 7 *Incrémenter*, c'est ajouter un à un compteur. Par exemple, lorsqu'on incrémente un compteur dont la valeur est 13, on obtient la valeur 14. Lorsque le compteur est représenté en binaire, on passe ainsi de 1101 à 1110. Il existe une méthode infaillible pour incrémenter la représentation binaire d'un compteur :

(i) commencer par le bit de poids faible (celui qui est le plus à droite) ;

(ii) inverser le bit ;

(iii) tant que ce bit est à zéro, recommencer l'étape (ii) avec le bit situé à sa gauche ;

(iv) si on arrive au bout de la représentation binaire, ajouter un bit 1.

1. Exécuter cette méthode sur les représentations binaires 11011, 1000 et 11111.
2. Sachant que *décrémenter*, c'est retirer un d'un compteur ayant une valeur strictement positive, décrire une méthode qui réalise cette opération.
3. Décrire de même une méthode pour multiplier par deux la valeur d'un compteur.