Domaine Sciences et Technologies
PORTAIL 1 RENÉ DESCARTES

Science informatique : TD 6

Année 2021-22 **Lambda-calcul**

Les λ-termes sont construits à partir d'un ensemble fini de variables (x, y, z, $t\ldots$) à l'aide de deux constructions de base :

— l'abstraction permettant de créer des « fonctions » : $\lambda x\, A$ avec A un λ-terme qui peut (ou non) contenir la variable x (on dit que λx *lie* la variable x) ;

— l'application d'un terme à un autre : $A\,B$ avec A et B deux λ-termes.

Un λ-terme peut être réduit en applicant deux règles de calcul :

— la β-réduction, qui consiste à appliquer une fonction à un argument : si A et B sont des λ-termes tels qu'aucune variable apparaissant dans B n'est liée par un λ dans A,

$$(\lambda x\, A)B \to_\beta A[x := B]$$

où $A[x := B]$ dénote le λ-terme où chaque occurrence de la variable *libre* x est remplacée par le λ-terme B ;[1]

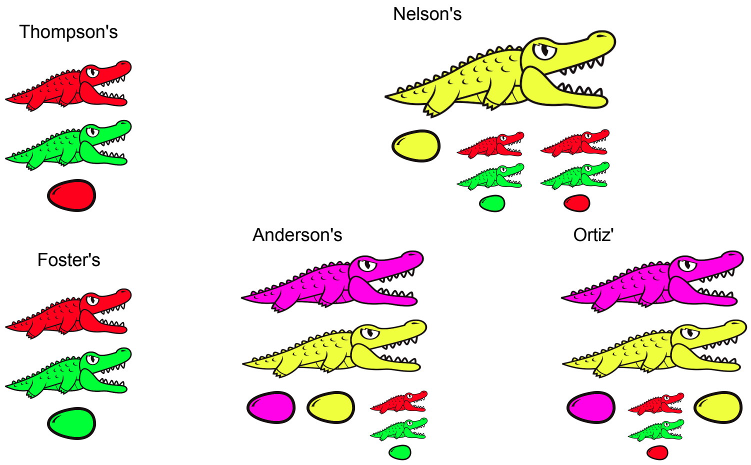
— l'α-conversion, qui permet de renommer des variables *liées* : si A est un λ-terme sans la variable y,

$$\lambda x\, A \to_\alpha \lambda y\, A[x := y]$$

On peut exécuter ces règles *à n'importe quel endroit du terme*, et on soulignera donc souvent le λ qu'on réduit dans la règle de β-réduction. Par exemple, en partant du terme $(\lambda x\,(x(\lambda y\, y))x)(\lambda z\, \lambda t\,(z\, t))$, on peut exécuter les réductions suivantes :

$$\begin{aligned}
\Big(\underline{\lambda x}\,(x(\lambda y\, y))x\Big)\big(\lambda z\,\lambda t\,(z\,t)\big) &\to_\beta \Big(\big(\underline{\lambda z}\,\lambda t\,(z\,t)\big)\big(\lambda y\, y\big)\Big)\big(\lambda z\,\lambda t\,(z\,t)\big)\\
&\to_\beta \big(\lambda t\,(\lambda y\, y)\,t\big)\big(\lambda z\,\lambda t\,(z\,t)\big)\\
&\to_\alpha \big(\underline{\lambda u}\,(\lambda y\, y)\,u\big)\big(\lambda z\,\lambda t\,(z\,t)\big)\\
&\to_\beta \big(\underline{\lambda y}\, y\big)\big(\lambda z\,\lambda t\,(z\,t)\big)\\
&\to_\beta \lambda z\,\lambda t\,(z\,t)
\end{aligned}$$

Le terme obtenu à la fin est *en forme normale* dans le sens qu'on ne peut plus lui appliquer de β-réduction. Il est cependant *équivalent* à n'importe quel terme qu'on peut obtenir à l'aide de la règle d'α-conversion. Par exemple, il est donc équivalent au terme $\lambda x\,\lambda y\,(x\, y)$.



1. La condition mise sur A et B permet d'éviter d'avoir à définir ce que voudrait dire $A[x := B]$ lorsque $A = \lambda y\, x$ (qui dénote la fonction constante égale à x) et $B = y$ (où la constante y est liée ailleurs). En effet, on n'aimerait pas avoir à écrire $A[x := B] = \lambda y\, y$ (la fonction identité) qui semble mélanger le nom de variable y de A qui pourrait être remplacé par n'importe lequel, avec le nom de variable y de B qui est *libre* et donc défini ailleurs que dans les termes A et B eux-mêmes... Il faudra donc d'abord renommer la variable y dans A, pour obtenir $\lambda z\, x$ et seulement ensuite appliquer la β-réduction pour obtenir $\lambda z\, y$ (la fonction constante égale à y).

Exercice 1

1. Écrire les familles ci-dessus sous la forme de λ-termes T, F, N, A, O.
2. Vérifier que le terme $(O\,T)\,F$ se réduit en T après application des règles de β-réduction et d'α-conversion. Montrer de même que le terme $(O\,F)\,F$ se réduit en F.

Exercice 2 On représente les entiers naturels dans le λ-calcul de la façon suivante : l'entier $n \in \mathbb{N}$ est représenté par le terme

$$\lambda x\,\lambda y\,\Big(\underbrace{x\big(x(\cdots(x}_{n\text{ fois}}\ y)\cdots)\big)\Big)$$

Ainsi, l'entier 0 est représenté par le terme $\lambda x\,\lambda y\,y$, l'entier 1 par le terme $\lambda x\,\lambda y\,(x\,y)$, l'entier 2 par le terme $\lambda x\,\lambda y\,(x(x\,y))$, etc. On note T_n le terme codant l'entier n.

1. Trouver un terme S qui réalise la fonction *successeur*, c'est-à-dire tel que pour tout entier n, la réduction du terme $S\,T_n$ termine en la forme normale T_{n+1}.
2. Additionner un entier m à un entier n, c'est appliquer m fois consécutives l'opération *successeur* à l'entier n. En déduire un terme A qui réalise l'addition de deux entiers, c'est-à-dire tel que pour tous entiers m et n, la réduction du terme AT_mT_n termine en la forme normale T_{m+n}.
3. En appliquant la même idée, proposer un terme M qui réalise la multiplication de deux entiers, c'est-à-dire tel que pour tous entiers m et n, la réduction du terme MT_mT_n termine en la forme normale $T_{m\times n}$.

Exercice 3 On sait que le problème de l'arrêt d'une machine de Turing n'est pas un problème qu'on peut résoudre avec une machine de Turing. Cela pose alors la question de savoir si les réductions des λ-termes terminent toutes. Il n'en est rien : il existe des termes qu'on peut réduire un nombre infini de fois, sans jamais tomber sur une forme normale. Saurez-vous en trouver un ?