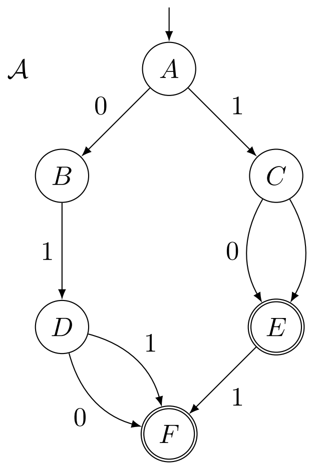
Domaine Sciences et Technologies
Portail 1 René Descartes

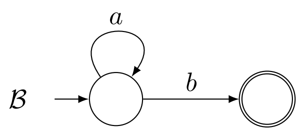
Science informatique : TD 6

Année 2022-23

Automates

Un automate est composé d'*états* et de *transitions* étiquetées par des lettres d'un alphabet A. Il possède également un état *initial* et des états *acceptants*. On représente ci-dessous deux automates : celui de gauche, $\mathcal{A}$, sur l'alphabet $\{0, 1\}$; celui de droite, $\mathcal{B}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$.



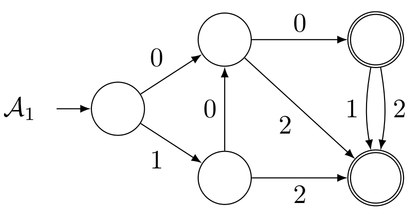


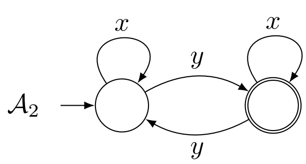
Considérons l'automate $\mathcal{A}$ à gauche. Ses états sont A, B, C, D, E et F. L'état initial est A, distingué par une flèche entrante. Les états acceptants sont E et F distingués par un double cercle (cela diffère de la couleur verte que nous avons utilisé pendant le cours !). Cet automate possède 8 transitions : par exemple, il y en a une de l'état A vers l'état B étiquetée par la lettre 0, et une autre de l'état E à l'état F étiquetée par la lettre 1.

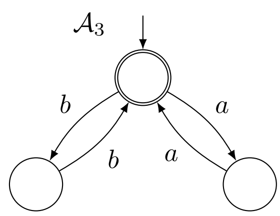
Un automate accepte un ensemble de séquences. Une séquence s est *acceptée* par l'automate s'il existe un chemin (et s'il existe, il est unique) de l'état initial à un état acceptant dont la séquence des étiquettes des transitions visitées (dans l'ordre) est s. Ainsi, la séquence 011 est acceptée par l'automate $\mathcal{A}$ de gauche ci-dessus, mais pas la séquence 01 qui ne termine pas dans un état acceptant, ni la séquence 110 pour laquelle il n'y a pas de chemin avec cette étiquette (on bloque en E lorsqu'il s'agit de lire la lettre 0). L'ensemble des séquences acceptées par l'automate $\mathcal{A}$ est $\{010, 011, 10, 11, 101, 111\}$: ce sont l'ensemble des codages binaires sur moins de 3 bits représentant des entiers premiers (2, 3, 5, 7).

Pour l'automate $\mathcal{B}$, à droite ci-dessus, l'ensemble des séquences acceptées sont de la forme $aa \cdots aab$, c'est-à-dire une séquence de a avec un unique b à la fin. Dans les dessins, il n'est pas toujours nécessaire de donner des noms aux états, comme dans l'exemple de l'automate $\mathcal{B}$. Mais on peut évidemment donner des noms si on le souhaite, pour aider à comprendre la signification de l'état : ici, l'état de gauche de $\mathcal{B}$ pourrait s'appeler « que des a » et l'état de droite « b à la fin », ou simplement « a » et « b » si on veut des noms plus courts...

Exercice 1 Pour chacun des trois automates $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ ci-dessous, décrire l'alphabet ainsi que l'ensemble des séquences acceptées.







Exercice 2 On se place, dans cet exercice, sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

1. Dessiner un automate qui accepte l'ensemble des séquences possédant un nombre de 1 multiple de 3 : ainsi la séquence 0011010 doit être acceptée, mais pas la séquence 1101011.
2. Dessiner un automate qui accepte l'ensemble des séquences de longueur au plus 4 qui possède autant de 0 que de 1 (dans n'importe quel ordre). Essayer d'obtenir un automate avec un nombre minimal d'états, en modifiant éventuellement votre première tentative.
3. À partir de l'automate obtenu à la question précédente, en déduire un automate qui accepte l'ensemble des séquences de longueur au plus 6 qui possède autant de 0 que de 1.

Exercice 3 Une bergère voyage avec un loup, un mouton et un chou. Elle doit leur faire traverser une rivière au moyen d'une barque. Cette barque est si petite qu'elle ne peut emporter qu'un passager (loup, mouton ou chou) en plus de la bergère. La barque ne peut pas traverser sans la bergère, qui est la seul à savoir ramer. La bergère peut traverser seule.

Attention, pour des raisons évidentes, le loup et le mouton ne sont jamais autorisés à rester sur une rive ensemble sans la bergère. Même chose pour le mouton et le chou.

Comment la bergère doit-elle s'y prendre pour amener tout le monde de l'autre côté de la rivière sain et sauf ? Utilisons un automate pour l'aider !

1. Quelles sont les configurations possibles de ce problème ? On pourra les décrire en observant les personnages qui peuvent se trouver sur la rive de départ et la rive d'arrivée. Ces configurations constitueront l'ensemble des états de l'automate.
2. Préciser les états initiaux et finaux.
3. Proposer un alphabet pour étiqueter les transitions de l'automate, puis dessiner l'automate complètement.
4. Expliquer quelle est la meilleure façon de procéder pour la bergère sur la base de l'automate que vous avez construit.

Exercice 4 On se place, dans cet exercice, sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.

1. Dessiner un automate qui accepte l'ensemble des séquences qui se terminent par *cca* : ainsi, le mot *bacbcca* doit être accepté, mais pas le mot *bccba*, ni le mot *bccab*.
2. Dessiner un automate qui accepte l'ensemble des séquences qui se terminent par *abba* : attention, le mot *abbabba* doit être accepté !

Exercice 5 Dans le film *Die Hard 3* (*Une journée en enfer*)[1], les deux héros, John McClane et Zeus Carver, doivent résoudre l'énigme de Simon Gruber pour arrêter le compte à rebours d'une bombe. Voici l'énigme : « Sur la fontaine, il y a deux bidons : l'un a une contenance de 5 gallons, l'autre de 3 gallons. Remplissez l'un des bidons de 4 gallons d'eau exactement et placez-le sur la balance. La minuterie s'arrêtera. Soyez extrêmement précis : un gramme de plus ou de moins et c'est l'explosion ! ». Aidons les héros à s'en sortir en modélisant le problème avec des automates.

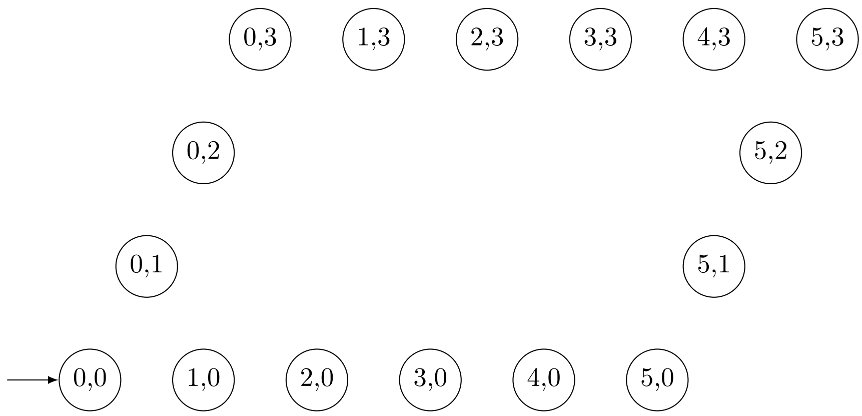
1. Commençons par étudier une énigme alternative, plus simple. On suppose donc ici qu'on possède deux bidons : l'un ayant une contenance de 2 gallons, l'autre de 3 gallons. Par contre, sur la fontaine sont disposées deux balances et l'objectif est de déposer sur l'une des balances un bidon rempli d'un gallon et sur l'autre balance un bidon rempli de trois gallons. Un état du système (et donc de l'automate qu'on veut obtenir) correspond au volume d'eau contenu dans chacun des deux bidons, c'est-à-dire une paire (a, b) où a est le volume d'eau contenu dans le bidon de 3 gallons et b le volume d'eau contenu dans le bidon de 2 gallons, avec $0 \leq a \leq 3$ et $0 \leq b \leq 2$. Les actions élémentaires possibles du système, qui correspondent donc à l'alphabet de l'automate, sont de remplir un des deux bidons (qu'il soit initialement vide ou pas), vider un des deux bidons (qu'il soit initialement plein ou pas) et transvaser le contenu d'un des bidons dans l'autre jusqu'à ce que ce dernier soit plein. On note :

1. Vous pouvez consulter en français la scène correspondante du film sur `https://www.youtube.com/watch?v=pmk2mNf9iqE`.

— r_3 l'action de « remplir le bidon de 3 gallons »
— r_2 l'action de « remplir le bidon de 2 gallons »
— v_3 l'action de « vider le bidon de 3 gallons »
— v_2 l'action de « vider le bidon de 2 gallons »
— t_3 l'action de « transvaser le contenu du bidon de 3 gallons dans le bidon de 2 gallons, jusqu'à ce que celui-ci soit plein »
— t_2 l'action de « transvaser le contenu du bidon de 2 gallons dans le bidon de 3 gallons, jusqu'à ce que celui-ci soit plein ».

Construire l'automate décrivant entièrement le système.

2. En déduire une solution permettant d'aller de la configuration $(0, 0)$ à la configuration $(3, 1)$ où exactement 3 gallons d'eau se trouvent dans le bidon de 3 gallons et 1 gallon d'eau dans le bidon de 2 gallons. Décrire la suite d'opérations que les héros doivent effectuer pour y parvenir.
3. Est-il possible, depuis la configuration initiale, de réaliser une suite d'opérations arrivant dans la configuration où il y a 1 gallon d'eau dans chacun des deux bidons ?
4. Revenons au problème original du film *Die Hard 3*. L'automate de ce problème a pour état les paires (a, b) où a est le volume d'eau contenu dans le bidon de 3 gallons et b le volume d'eau contenu dans le bidon de 2 gallons, avec $0 \leq a \leq 3$ et $0 \leq b \leq 2$. Les actions possibles dans l'alphabet de l'automate sont désormais r_3, r_5, v_3, v_5, t_3 et t_5. Construire la partie accessible de l'automate, c'est-à-dire uniquement les transitions et les états qu'on peut atteindre par un chemin à partir de l'état initial $(0, 0)$. Vous devriez trouver 16 états accessibles et on suggère de compléter l'automate ci-dessous en dessinant les transitions :



5. En déduire une solution la plus courte possible permettant d'aller de la configuration $(0, 0)$ à une configuration de la forme $(4, b)$ où exactement 4 gallons d'eau se trouvent dans le bidon de 5 gallons. Décrire la suite d'opérations qu'il faut effectuer pour arrêter la bombe dans le film *Die Hard 3*.
6. Imaginons une dernière énigme avec deux bidons, l'un de 6 gallons et l'autre de 15 gallons. Peut-on remplir l'un des deux bidons avec exactement 5 gallons d'eau ? *Indication : il n'est peut-être pas besoin de construire l'automate en entier...*

Exercice 6 L'alphabet morse donne un code pour les 26 lettres de l'alphabet composé d'impulsions courtes (•) et longues (▬) :

A •▬	B ▬•••	C ▬•▬•	D ▬••	E •	F ••▬•
G ▬▬•	H ••••	I ••	J •▬▬▬	K ▬•▬	L •▬••
M ▬▬	N ▬•	O ▬▬▬	P •▬▬•	Q ▬▬•▬	R •▬•
S •••	T ▬	U ••▬	V •••▬	W •▬▬	X ▬••▬
Y ▬•▬▬	Z ▬▬••				

Trouver un automate, ayant le plus petit nombre d'états possibles, qui accepte exactement l'ensemble des codes morse.